

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Ngày thi: 27/6/2013

(Đề thi gồm có: 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (2,0 điểm)

Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} \right) : \left(\frac{x + y + 2xy}{1 - xy} + 1 \right)$, với $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

- a. Rút gọn A. b. Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$. c. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 2: (2,0 điểm)

a. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ -x + my = -2 \end{cases}$

a1. Với giá trị nào của m thì hệ đã cho nhận (1; 1) là nghiệm.

a2. Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm thỏa $x \leq 0$ và $y \geq 0$.

b. Khi thêm 01 gam axit vào dung dịch axit (1) gồm nước và axit cùng loại thì ta được dung dịch axit (2) có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$. Nếu thêm 01 gam nước vào dung dịch axit (2) ta được dung dịch axit (3) có nồng độ là $28\frac{4}{7}\%$. Tính nồng độ phần trăm axit của dung dịch axit (1).

Câu 3: (1,5 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ (1)

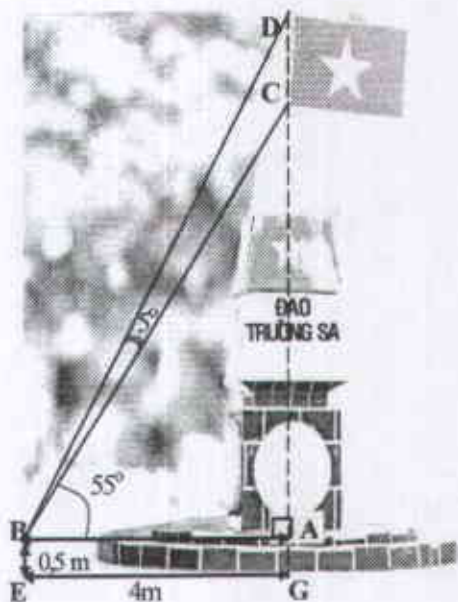
- a. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
b. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.
c. Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = x_1^2 + x_2^2$

Câu 4: (2,5 điểm)

a. Chứng minh rằng với mọi số x, y, ta có: $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$

b. Một xe con và một xe tải khởi hành cùng lúc tại hai tỉnh A và B, đi ngược chiều nhau với vận tốc không đổi. Xe con đi từ A đến B rồi trở ngay về A, còn xe tải đi từ B đến A rồi trở ngay về B. Hai xe gặp nhau lần đầu tại một điểm cách A là 40km và gặp nhau lần thứ hai tại một điểm cách B là 10km. Hãy tính khoảng cách giữa hai tỉnh A và B, biết hai xe gặp nhau khi di chuyển ngược chiều nhau.

c. Trụ treo cờ tại Đảo Trường Sa, với kích thước được cho như hình vẽ 1. Hãy tính chiều cao (DG) của trụ và chiều cao (DC) của lá cờ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



hình vẽ 1

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), có AB=AC. Các đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H.

- a. Chứng minh rằng tứ giác AFHG nội tiếp, xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
b. Chứng minh rằng $AG.AC = AH.AE$.
c. Chứng minh EF là tiếp tuyến của đường tròn (I). - HẾT-

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký GT1: _____

Chữ ký GT2: _____

BẢN CHÍNH

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN: TOÁN

Ngày thi: 27/6/2013

(Hướng dẫn chấm gồm có: 03 trang)

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

3) Riêng câu 5, phải có hình vẽ đúng thì mới chấm điểm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1: (2,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	0,75
$A = \frac{2\sqrt{x} + 2y\sqrt{x}}{1 - xy} : \frac{x + y + xy + 1}{1 - xy}$	0,5
$A = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$	0,25
b)	0,75
$x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = 2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$	0,25
$x = (\sqrt{3} + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$	0,25
Vậy $A = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} - 2}{13}$	0,25
c)	0,5
Có $A = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \leq \frac{1 + x}{1 + x} = 1$ (do $(1 - \sqrt{x})^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x \geq 2\sqrt{x}$)	0,25
Nên $\max A = 1$ khi $x = 1$ và $y \neq 1$	0,25

Câu 2: (2,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	1,25
a1.	0,5
Hệ nhận (1; 1) là nghiệm ta có: $\begin{cases} m + 2 = 1 \\ -1 + m = -2 \end{cases}$	0,25
$\begin{cases} m = -1 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$	0,25
a2.	0,75
Nhận xét: $\frac{m}{-1} \neq \frac{2}{m}$ hay $m^2 \neq -2$ đúng $\forall m$, nên hệ đã cho luôn có nghiệm	0,25
Bằng phương pháp thế ta được $x = \frac{m + 4}{m^2 + 2}$; $y = \frac{1 - 2m}{m^2 + 2}$	0,25
Hệ có nghiệm thỏa $x \leq 0$ và $y \geq 0 \Leftrightarrow m + 4 \leq 0$ và $1 - 2m \geq 0$ hay $m \leq -4$	0,25

b)		0,75
Gọi lượng nước có trong dung dịch axit (1) x gam ($x > 0$) Gọi lượng axit có trong dung dịch axit (1) là y gam ($y > 0$)		0,25
Nồng độ axit trong dung dịch axit (1) là $\frac{y}{x+y} \cdot 100\%$		
Sau khi thêm 01 gam axit vào dung dịch axit (1) thì dung dịch axit (2) có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$, ta có phương trình: $\frac{y+1}{x+y+1} = \frac{1}{3}$ hay $x - 2y = 2$		0,25
Sau khi thêm 01 gam nước vào dung dịch axit (2), thì dung dịch axit (3) có nồng độ axit là $28\frac{4}{7}\%$, ta có phương trình: $\frac{y+1}{x+y+2} = \frac{2}{7}$ hay $2x - 5y = 3$		
Ta có: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy nồng độ axit trong dd axit (1) là: $\frac{1}{5} \cdot 100\%$ hay 20%		0,25

Câu 3: (1,5 điểm)

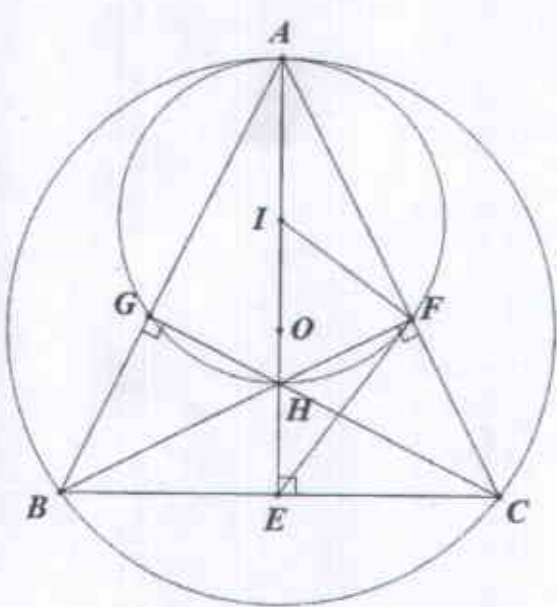
	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)		0,5
	Ta có $\Delta' = m^2 - 3m + 4 = (m - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0 \forall m$. Vậy pt luôn có 2 nghiệm phân biệt	0,25-0,25
b)		0,5
	Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = m-3 \end{cases}$	0,25
	$\Rightarrow x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 4 = 0$ không phụ thuộc vào m	0,25
c)		0,5
	$P = x_1^2 + x_2^2 = 4(m-1)^2 - 2(m-3)$	0,25
	$P = (2m - \frac{5}{2})^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4} \forall m$, Vậy $\min P = \frac{15}{4}$, khi $m = \frac{5}{4}$	0,25

Câu 4: (2,5 điểm)

	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)		0,75
	$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0$	
	$\Leftrightarrow (x-y)(x^3 - y^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-y)^2[(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2] \geq 0$ đúng với mọi số x,y. (đpcm)	0,25
b)		1,0
	Gọi C, D lần lượt là chỗ gặp nhau lần 1 và lần 2 của 2 xe. Ta có AC = 40km và BD = 10km. Gọi khoảng cách giữa AB là x km ($x > 0$)	0,25
	Từ lúc khởi hành tới lúc hai xe gặp nhau lần đầu: xe con đi được 40km, xe tải đi được $(x - 40)$ km. ($x > 40$)	0,25
	Từ lúc gặp nhau lần đầu đến lúc gặp nhau lần sau: xe con đi được $(x - 40 + 10)$ km, xe tải đi được $(40 + x - 10)$ km.	
	Trong cùng một thời gian thì tỉ số hai quãng đường mà hai xe đi được bằng tỉ số của hai vận tốc hai xe nên ta có phương trình:	0,25

	$\frac{40}{x-40} = \frac{x-30}{x+30}$	
	hay $x^2 - 110x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 110 (>40) \\ x_2 = 0 (<40) \end{cases}$ Vậy $x=110\text{km}$.	0,25
c)		0,75
	Ta có: $AB = GE = 4 \text{ (m)}$ $AC = AB \cdot \tan 55^\circ \approx 5,71 \text{ (m)}$	0,25
	$AD = AB \cdot \tan 60^\circ \approx 6,93 \text{ (m)}$ $DC = AD - AC \approx 1,22 \text{ (m)}$	0,25
	$DG = AD + AG \approx 6,93 + 0,5 = 7,43 \text{ (m)}$	0,25

Câu 5: (2,0 điểm)

NỘI DUNG		ĐIỂM
	a)	0,75
	Ta có AE, BF, CG là ba đường cao trong tam giác ABC cắt nhau tại H $\Rightarrow \widehat{AGH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{AGH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$, suy ra tứ giác AFHG là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Vì F, G nhìn AH dưới 1 góc vuông, nên AFHG nội tiếp đường tròn đường kính AH, vì vậy tâm I đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHG là trung điểm AH.	0,25
	b)	0,5
	Xét $\triangle AGH$ và $\triangle AEB$ có \widehat{BAE} chung và $\widehat{AGH} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \triangle AGH$ đồng dạng $\triangle AEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB \cdot AG = AH \cdot AE$ (*)	0,25
	Ta lại có $AB = AC$ (gt), thay vào (*) ta có: $AG \cdot AC = AH \cdot AE$ (đpcm)	0,25
c)	0,75	
Xét $\triangle IAF$ có $IA = IF$, suy ra $\triangle IAF$ cân $\Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{IFA}$ (1) Xét $\triangle BFC$ có FE là trung tuyến (do AE là đường cao của $\triangle ABC$ cân) $\Rightarrow EF = EB \Rightarrow \triangle EBF$ cân tại E $\Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{EFB}$ (2)	0,25	
Mặt khác $\widehat{IAF} + \widehat{BCA} = 90^\circ$; $\widehat{EBF} + \widehat{BCA} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{IFA} = \widehat{EBF} = \widehat{EFB}$ (3) Mà $\widehat{IFA} + \widehat{IFH} = 90^\circ$ (gt) (4)	0,25	
Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{IFH} + \widehat{HFE} = 90^\circ \Rightarrow EF \perp IF$, suy ra EF là tiếp tuyến của (I) tại E	0,25	

-----HẾT-----