

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT  
ĐỀ THI CHÍNH THỨC NĂM 2013



Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất : 11/01/2013

**Bài 1 (5,0 điểm).** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Bài 2 (5,0 điểm).** Cho dãy số thực  $(a_n)$  xác định bởi :

$$a_1 = 1 \text{ và } a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Bài 3 (5,0 điểm).** Cho tam giác không cân  $ABC$ . Kí hiệu  $(I)$  là đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tam giác  $ABC$  và  $D, E, F$  lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn  $(I)$  với các cạnh  $BC, CA, AB$ . Đường thẳng đi qua  $E$  và vuông góc với  $BI$  cắt  $(I)$  tại  $K$  ( $K \neq E$ ), đường thẳng đi qua  $F$  và vuông góc với  $CI$  cắt  $(I)$  tại  $L$  ( $L \neq F$ ). Gọi  $J$  là trung điểm của  $KL$ .

a) Chứng minh rằng  $D, I, J$  thẳng hàng.

b) Giả sử các đỉnh  $B$  và  $C$  cố định, đỉnh  $A$  thay đổi sao cho tỷ số  $\frac{AB}{AC} = k$  ( $k$  không đổi). Gọi  $M, N$  tương ứng là các giao điểm của  $IE, IF$  với  $(I)$  ( $M \neq E, N \neq F$ ).  $MN$  cắt  $IB, IC$  lần lượt tại  $P, Q$ . Chứng minh rằng trung trực của  $PQ$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 4 (5,0 điểm).** Cho trước một số số tự nhiên được viết trên một đường thẳng. Ta thực hiện các bước điền số lên đường thẳng như sau : tại mỗi bước, trước tiên xác định tất cả các cặp số kề nhau hiện có trên đường thẳng theo thứ tự từ trái qua phải, sau đó điền vào giữa mỗi cặp một số bằng tổng của hai số thuộc cặp đó. Hỏi sau 2013 bước, số 2013 xuất hiện bao nhiêu lần trên đường thẳng trong các trường hợp sau :

a) Các số cho trước là : 1 và 1000 ?

b) Các số cho trước là : 1, 2, ..., 1000 và được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải ?

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT  
ĐỀ THI CHÍNH THỨC NĂM 2013



Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai : 12/01/2013

**Bài 5 (7,0 điểm).** Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn :  $f(0) = 0, f(1) = 2013$  và

$$(x - y)(f(f^2(x)) - f(f^2(y))) = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y))$$

đúng với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ , trong đó  $f^2(x) = (f(x))^2$ .

**Bài 6 (7,0 điểm).** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và điểm  $D$  thuộc cung  $\widehat{BC}$  không chứa điểm  $A$ . Đường thẳng  $\Delta$  thay đổi đi qua trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABH$  và tam giác  $ACH$  lần lượt tại  $M$  và  $N$  ( $M \neq H, N \neq H$ ).

- Xác định vị trí của đường thẳng  $\Delta$  để diện tích tam giác  $AMN$  lớn nhất.
- Kí hiệu  $d_1$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $DB$ ,  $d_2$  là đường thẳng đi qua  $N$  và vuông góc với  $DC$ . Chứng minh rằng giao điểm  $P$  của  $d_1$  và  $d_2$  luôn thuộc một đường tròn cố định.

**Bài 7 (6,0 điểm).** Tìm số các bộ sắp thứ tự  $(a, b, c, a', b', c')$  thỏa mãn :

$$\begin{cases} ab + a'b' \equiv 1 \pmod{15} \\ ac + a'c' \equiv 1 \pmod{15} \\ bc + b'c' \equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

với  $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, \dots, 14\}$ .

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.