SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH ĐỒNG THÁP	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH NĂM HỌC 2014 - 2015

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Ngày thi: 22/3/2015

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)

(Đề thi gồm có: 01 trang)

<u>Câu 1:</u> (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ có đồ thị (C_m) với m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ hàm số khi $m = 3$.

b) Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng d: $y = 1$ tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho điểm M thuộc trục tung và các tiếp tuyến của (C_m) tại N và P vuông góc nhau.

<u>Câu 2:</u> (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{xy + (x-y)\left(\sqrt{xy} - 2\right)} - y = \sqrt{y} - \sqrt{x} \\ (x+1)\left(y + \sqrt{xy} + x - x^2\right) = 4 \end{cases}$

b) Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x + \sin^2 2x\right)\cos 2x dx$

<u>Câu 3:</u> (4,0 điểm)

a) Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^8 + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i}$

b) Từ tập hợp số 1;2;3;4;5;6;7;8;9 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và không lớn hơn 4567.

<u>Câu 4:</u> (4,0 điểm)

a) Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(1;0;0), B(0;1;2) và C(2;2;1). Tìm tọa độ điểm D trong không gian cách đều 3 điểm A, B, C và cách mặt phẳng (ABC) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

b) Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Đường thẳng d đi qua D_1 và tâm O của hình vuông BCC_1B_1. Đoạn thẳng MN có trung điểm K thuộc đường thẳng d, biết M thuộc mặt phẳng (BCC_1B_1) và N thuộc mặt phẳng (ABCD). Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN theo a.

<u>Câu 5:</u> (4,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Biết $B(3;3)$, $C(5;-3)$ và giao điểm I của hai đường chéo hình thang nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + y - 3 = 0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$ để $CI = 2BI$ và tam giác ABC có diện tích bằng 12. Biết điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.

b) Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = \frac{x^2}{z\left(z^2 + x^2\right)} + \frac{y^2}{x\left(x^2 + y^2\right)} + \frac{z^2}{y\left(y^2 + z^2\right)} + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

.....HẾT.....

Họ và tên thí sinh: ______________________ Số báo danh: ______________________

Chữ ký GT1: ______________________ Chữ ký GT2: ______________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG THÁP

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT
CẤP TỈNH NĂM HỌC 2014 - 2015

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN: TOÁN

Ngày thi: 22/3/2015

(Hướng dẫn chấm gồm có:06 trang)

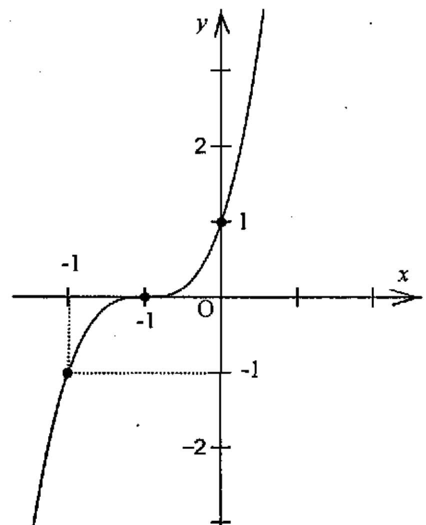
I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1: (4,0 điểm)

<table>
<tr><th>Ý</th><th>NỘI DUNG</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td></td><td>+ Tập xác định: D = R
+ $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2 \geq 0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R, hàm số không có cực trị.
+ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>+ Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>+ Đồ thị qua A(-2;-1); B(-1;0); C(0;1)
</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng d: $y = 1$ tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho điểm M thuộc trục tung và các tiếp tuyến của (C_m) tại N và P vuông góc nhau.</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng d: y=1
$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^2 + 3x + m = 0 & (2) \end{array}\right.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>(C_m) cắt đường thẳng d tại M(0;1), N, P phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	nghiệm phân biệt $x_N, x_P \neq 0$. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9-4m > 0 \\ 0^2+3.0+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$ (*)	
	Tiếp tuyến của (Cm) tại N, P có hệ số góc lần lượt là: $k_N = f'(x_N) = 3x_N^2 + 6x_N + m = -(3x_N + 2m);$ $k_P = f'(x_P) = 3x_P^2 + 6x_P + m = -(3x_P + 2m).$ Do các tiếp tuyến này vuông góc với nhau nên: $k_N.k_P = 1 \Leftrightarrow (3x_N+2m)(3x_P+2m) = -1 \Leftrightarrow 9x_Nx_P + 6m(x_N+x_P) + 4m^2 = -1$ (**)	0,5
	Theo Định lý Talet: $\begin{cases} x_N + x_P = -3 \\ x_Nx_P = m \end{cases}$, (**) $\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9+\sqrt{65}}{8} \\ m = \dfrac{9-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right.$ Kết hợp với điều kiện (*), ta được: $m = \dfrac{9 \pm \sqrt{65}}{8}$	0,5

Câu 2: (4,0 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)} - y = \sqrt{y} - \sqrt{x} & (1) \\ (x+1)(y+\sqrt{xy}+x-x^2) = 4 & (2) \end{cases}$	2.0
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2) \geq 0 \end{cases}$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)} - y + (\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{(x-y)(y+\sqrt{xy}-2)}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y} + \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$ $\Leftrightarrow (x-y).\left[\dfrac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right] = 0$ (3)	0,5
	Từ phương trình (2), ta có: $y+\sqrt{xy} = x^2 - x + \dfrac{4}{x+1} = (x-1)^2 + \left(x+1+\dfrac{4}{x+1}\right) - 2 \geq 2$ Suy ra: $\dfrac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > 0$	0,5
	Khi đó, phương trình (3) $\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$, thay vào pt(2) ta được: $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$	0,5
	Kết hợp điều kiện, nhận $x = 1$ và $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$	0,5

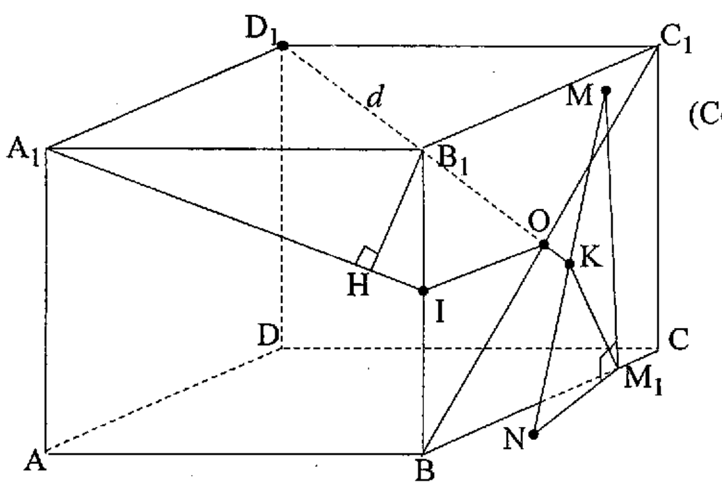
	Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;1)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$	
b)	Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+\sin^2 2x)\cos 2x dx$	2,0
	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+\sin^2 2x)cos2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}xcos2xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2xcos2xdx=I_1+I_2$	0,5
	Tính I_1 Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$ $\Rightarrow I_1=\frac{x}{2}\sin 2x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}cos2x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$	0,5
	Tính I_2 $I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{6}$	0,5
	Vậy $I=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{12}$	0,5

<u>Câu 3:</u> (4,0 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Thực hiện phép tính: $A=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33}+(1-i)^8+(2+3i)(2-3i)+\frac{1}{i}$	2,0
	$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{1+i^2+2i}{1+1}=i\Rightarrow\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33}=i^{33}=\left(i^2\right)^{16}.i=i$	0,5
	$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i\Rightarrow(1-i)^8=(-2i)^4=16$	0,5
	$(2+3i)(2-3i)=4-(3i)^2=13$ $\frac{1}{i}=-i$	0,5
	Vậy $A=i+16+13-i=29$	0,5
b)	Từ tập hợp số 1;2;3;4;5;6;7;8;9 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và không lớn hơn 4567	2,0
	Gọi số có 4 chữ số khác nhau dạng $\overline{abcd}$ Vì $\overline{abcd}\le 4567$ nên a có thể nhận các giá trị 1;2;3;4	0,5
	Nếu a=4, khi đó b có thể chọn các số 1;2;3;5 Nếu $b\ne 5$ thì số cách chọn cho c và d là 7x6=30 cách Nếu b=5 thì c có thể chọn từ các chữ số 1;2;3;6 Nếu $c\ne 6$ thì d có 6 cách chọn Nếu c=6 thì d có 4 cách chọn $(d\in\{1;2;3;7\})$ Số các số có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 4567 và có dạng $\overline{4bcd}$ là:	0,5

	1.4+3.6+3.7.6=148 (số).	
	Nếu $a \neq 4$ thì số cách chọn cho các số a,b,c,d là 3x8x7x6=1008 Số các số có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 4567 và có chữ số hàng ngàn khác 4 là: 1008	0,5
	Vậy có 148+1008=1156 số.	0,5

<u>Câu 4:</u> (4,0 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(1;0;0), B(0;1;2) và C(2;2;1). Tìm tọa độ điểm D trong không gian cách đều 3 điểm A, B, C và cách mặt phẳng (ABC) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.	2,0
	Giả sử $D(a;b;c)$ với $a,b,c \in R$ Gọi véctơ pháp tuyến của mp(ABC) là $\vec{n}$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB};\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (-3;3;-3) = -3(1;-1;1)$ $\Rightarrow (ABC): x-y+z-1=0$	0,5
	Từ giả thuyết, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(a-1)^2+b^2+c^2=a^2+(b-1)^2+(c-2)^2\\(a-1)^2+b^2+c^2=(a-2)^2+(b-2)^2+(c-1)^2\\\dfrac{\lvert a-b+c-1\rvert}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\end{cases}$	0,5
	Giải hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases}-a+b+2c=2\\a+2b+c=4\\\lvert a-b+c-1\rvert=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=c\\b=2-c\\\lvert a-b+c-1\rvert=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=c\\b=2-c\\\lvert c-1\rvert=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=0\\c=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\b=2\\c=0\end{cases}$	0,5
	Vậy tọa độ cần tìm là $D_1(2;0;2)$; $D_2(0;2;0)$.	0,5
b)	Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Đường thẳng d đi qua D_1 và tâm O của hình vuông BCC_1B_1. Đoạn thẳng MN có trung điểm K thuộc đường thẳng d, biết M thuộc mặt phẳng (BCC_1B_1) và N thuộc mặt phẳng (ABCD). Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN theo a.	2,0
	 (Có hình cho 0,25 đ) Gọi M_1 là hình chiếu của M lên BC. Khi đó: $MM_1 \perp (ABCD)$	0,5
	Từ đó ta có: tam giác MM_1N vuông tại M_1 và $M_1K = \dfrac{MN}{2}$ Suy ra: MN bé nhất khi và chỉ khi M_1K bé nhất.	0.5

	$M_1K_{min} \Leftrightarrow$ M_1K là độ dài đoạn vuông góc chung của BC và d hay $M_1K = d(BC,d)$	
	Gọi I là trung điểm BB_1, H là hình chiếu của B_1 trên A_1I Ta có BC song song mặt phẳng (A_1D_1OI) nên $M_1K = d(BC,d) = d(B,(A_1D_1OI)) = d(B_1,(A_1D_1OI)) = B_1H$ $\frac{1}{B_1H^2} = \frac{1}{B_1I^2} + \frac{1}{B_1A_1^2} \Rightarrow B_1H = \frac{a\sqrt{5}}{5}$	0.5
	Vậy $MN_{min} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$	0.5

Câu 5: (4,0 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Biết $B(3;3)$, $C(5;-3)$ và giao điểm I của hai đường chéo hình thang nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+y-3=0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$ để $CI = 2BI$ và tam giác ABC có diện tích bằng 12. Biết điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.	2,0
	Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(t, 3-2t)$ với $t > 0$ Do $CI = 2BI \Leftrightarrow 15t^2 + 10t - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{-5}{3}\ (loai) \end{array}\right. \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(1;1)$	0,5
	Phương trình đường thẳng (IC): x+y-2=0 Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.\mathrm{d}(B,IC) = 12 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$	0,5
	Vì $A \in (IC) \Rightarrow A(a;2-a), a < 0$ nên ta được: $(a-5)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11\ \text{(loai)} \\ a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow a = -1 \Rightarrow A(-1;3)$	0,5
	Ta có: $D = (IB) \cap (CD)$ Phương trình đường thẳng (IB): x-y=0; (CD): y+3=0 Suy ra tọa độ D nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-3;-3)$ Vậy tọa độ A(-1;3), D(-3;-3).	0,5
b)	Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \frac{x^2}{z(z^2+x^2)} + \frac{y^2}{x(x^2+y^2)} + \frac{z^2}{y(y^2+z^2)} + 2(x^2+y^2+z^2)$	2,0
	Ta có: $\frac{x^2}{z(z^2+x^2)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+x^2} \geq \frac{1}{z} - \frac{1}{2x}$ Tương tự: $\begin{cases} \frac{y^2}{x(x^2+y^2)} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} \\ \frac{z^2}{y(y^2+z^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{2z} \end{cases}$	0,5
	Suy ra	0,5

<table>
<tr><td></td><td>$A \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(\frac{1}{2x}+2x^2\right)+\left(\frac{1}{2y}+2y^2\right)+\left(\frac{1}{2z}+2z^2\right)$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2x}+2x^2$ với $x>0$
$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+4x=\frac{8x^3-1}{2x^2}; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
Lập bảng biến thiên của hàm số f(x)
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr></table>
suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Suy ra $A \ge f(x)+f(y)+f(z) \ge \frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$
Dấu = xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}$
Vậy GTNN $A=\frac{9}{2}$.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

------HẾT-----